

© International Baccalaureate Organization 2022

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2022

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2022

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Mathématiques : analyse et approches
Niveau supérieur
Épreuve 3

Jeudi 12 mai 2022 (matin)

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[55 points]**.

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fautive, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 28]

Cette question vous demande d'explorer certaines propriétés d'une famille de courbes du type $y^2 = x^3 + ax + b$ pour diverses valeurs de a et b , où $a, b \in \mathbb{N}$.

- (a) Sur le même système d'axes, esquissez les courbes suivantes pour $-2 \leq x \leq 2$ et $-2 \leq y \leq 2$, en indiquant clairement tout point d'intersection avec les axes.
- (i) $y^2 = x^3, x \geq 0$ [2]
- (ii) $y^2 = x^3 + 1, x \geq -1$ [2]
- (b) (i) Écrivez les coordonnées des deux points d'inflexion sur la courbe $y^2 = x^3 + 1$. [1]
- (ii) En considérant chaque courbe de la partie (a), identifiez deux caractéristiques principales qui permettraient de distinguer une courbe de l'autre. [1]

Maintenant, considérez les courbes de la forme $y^2 = x^3 + b$, pour $x \geq -\sqrt[3]{b}$, où $b \in \mathbb{Z}^+$.

- (c) En faisant varier la valeur de b , suggérez deux caractéristiques principales communes à toutes ces courbes. [2]

Ensuite, considérez la courbe $y^2 = x^3 + x, x \geq 0$.

- (d) (i) Montrez que $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}$, pour $x > 0$. [3]
- (ii) À partir de là, déduisez que la courbe $y^2 = x^3 + x$ n'a ni de minimum relatif ni de maximum relatif. [1]

La courbe $y^2 = x^3 + x$ a deux points d'inflexion. Étant donné la symétrie de la courbe, ces points ont la même abscisse.

- (e) Trouvez la valeur de cette abscisse, en donnant votre réponse sous la forme

$$x = \sqrt{\frac{p\sqrt{3} + q}{r}}, \text{ où } p, q, r \in \mathbb{Z}. \quad [7]$$

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

$P(x, y)$ est défini comme étant un point rationnel sur une courbe si x et y sont des nombres rationnels.

La tangente à la courbe $y^2 = x^3 + ax + b$ à un point rationnel P coupe la courbe en un autre point rationnel Q .

Soit C la courbe $y^2 = x^3 + 2$, pour $x \geq -\sqrt[3]{2}$. Le point rationnel $P(-1 ; -1)$ se situe sur C .

- (f) (i) Trouvez l'équation de la tangente à C au point P . [2]
- (ii) À partir de là, trouvez les coordonnées du point rationnel Q où cette tangente coupe C , en exprimant chaque coordonnée sous forme de fraction. [2]
- (g) Le point $S(-1 ; 1)$ se situe également sur C . La droite $[QS]$ coupe C en un autre point. Déterminez les coordonnées de ce point. [5]

2. [Note maximale : 27]

Cette question vous demande d'explorer les conditions d'existence des racines complexes pour des équations polynomiales de degré 3 et 4.

L'équation cubique $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, où $p, q, r \in \mathbb{R}$, possède les racines α, β et γ .

(a) En développant $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$, montrez que :

$$p = -(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$q = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

$$r = -\alpha\beta\gamma. \quad [3]$$

(b) (i) Montrez que $p^2 - 2q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. [3]

(ii) À partir de là, montrez que $(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 = 2p^2 - 6q$. [3]

(c) Sachant que $p^2 < 3q$, déduisez que α, β et γ ne peuvent pas être réelles. [2]

Considérez l'équation $x^3 - 7x^2 + qx + 1 = 0$, où $q \in \mathbb{R}$.

(d) En utilisant le résultat de la partie (c), montrez que lorsque $q = 17$, cette équation possède au moins une racine complexe. [2]

Noah croit que si $p^2 \geq 3q$, alors α, β et γ sont toutes réelles.

(e) (i) En faisant varier la valeur de q dans l'équation $x^3 - 7x^2 + qx + 1 = 0$, déterminez la plus petite valeur entière positive de q nécessaire pour montrer que Noah se trompe. [2]

(ii) Expliquez pourquoi l'équation aura au moins une racine réelle pour toutes les valeurs de q . [1]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

Considérez maintenant les équations polynomiales de degré 4.

L'équation $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, où $p, q, r, s \in \mathbb{R}$, possède les racines α, β, γ et δ .

D'une façon similaire à l'équation cubique, il est possible de démontrer que :

$$p = -(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

$$q = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta$$

$$r = -(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta)$$

$$s = \alpha\beta\gamma\delta.$$

(f) (i) Trouvez une expression pour $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ en fonction de p et q . [3]

(ii) À partir de là, indiquez une condition, en fonction de p et q , qui impliquerait que $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ possède au moins une racine complexe. [1]

(g) Utilisez votre résultat de la partie (f)(ii) pour montrer que l'équation $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = 0$ possède au moins une racine complexe. [1]

L'équation $x^4 - 9x^3 + 24x^2 + 22x - 12 = 0$ possède une racine entière.

(h) (i) Indiquez ce que le résultat de la partie (f)(ii) vous dit lorsque vous considérez l'équation $x^4 - 9x^3 + 24x^2 + 22x - 12 = 0$. [1]

(ii) Écrivez la racine entière de cette équation. [1]

(iii) En écrivant $x^4 - 9x^3 + 24x^2 + 22x - 12$ comme le produit d'un facteur linéaire et d'un facteur cubique, prouvez que l'équation possède au moins une racine complexe. [4]

Références :

© Organisation du Baccalauréat International 2022